

# 关于根轨迹分析的 MATLAB 方法

姚婕 李自成 余莎 郭仕林 董侯伟

成都理工大学工程技术学院自动化工程系 四川乐山 614000

**摘要:**在工业制造、军事科技、航空航天、交通出行、家庭服务等领域都涉及自动控制技术,自动控制理论为电气工程及其自动化的必修专业课程。运用根轨迹法理解控制系统的图解方法更为便捷,但手工绘制极为烦琐复杂,利用 MATLAB 仿真可以快速得到根轨迹图。同时课程内容抽象难以理解,实验教学效果直接影响学生的掌握情况。所以使用 MATLAB 仿真软件实践,从而能对该根轨迹法运用更为娴熟,还能提高学生的动手操作能力。

**关键词:**自动控制技术;MATLAB 仿真;根轨迹

## 1 概述

最早 MATLAB 软件是推出的计算机辅助设计软件,是一个功能强大的高科技计算软件。可用于高级算法、分析数据、强有力的系统仿真等方面高新领域。目前, MATLAB 已经发展成为国际上非常流行的科学与工程计算语言之一,成为我国高等院校理工科教学和科研中必备的工具之一。作为电气工程及其自动化的专业学生,应当充分掌握并熟练使用该软件。

《自动控制原理》是电气工程及其自动化专业学生的必修专业基础课程,因此十分重要,必须掌握。目前来看,实验教学成为主流,也是该课程中的一部分。而真实模型规模大,难以创建。使用仿真可以低成本且快速得到想要的实验效果。

其中对于控制系统我们可以又采用线性系统的根轨迹法。但由于根轨迹图复杂且难以人工绘制达到标准精确度,运用 MATLAB 的辅助技巧,能同时达到使学生通俗易懂、绘图便捷、精度高的效果。所以,本文主要针对根轨迹法在 MATLAB 中的研究。

## 2 根轨迹起源及其概念

谈起根轨迹的起源,由于当时所处时代采用解析法求取系统的闭环特征根较困难,并且若系统中的某一参数发生变化,则需重新计算。此时, W. R. Evans 在 1948 年提出了使用图解方法来求解闭环系统特征方程根的新途径,被称之为根轨迹法。

根轨迹法是分析和设计线性定常控制系统的图解方法,方法简便且通俗易懂。根轨迹也可称为根迹,它是任意开环系统中一参数从零到变化至无穷时,闭环系统特征方程式的根在 s 平面上的变化的轨迹。若运用根轨迹分析,可以快速且精准地找到该系统的在任意一点的开环增益或任意参数值下的闭环零、极点位置。

为具体清晰地阐述根轨迹法,试举例控制系统结构,如图 1 所示:

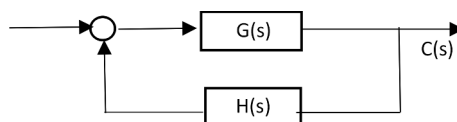


图 1

如图 1 所示,该系统的开环传递函数为:

$$G(s)H(s)$$

其闭环传递函数为:

$$\varphi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$$

则该函数的特征方程式可写为:

$$1+G(s)H(s) = 0$$

即:

$$K^* \frac{\prod_{j=1}^m (s-z_j)}{\prod_{i=1}^n (s-p_i)} = -1$$

其中  $z_j$  为已知的开环零点,  $p_i$  为已知的开环极点,  $K^*$  从零变到无穷。即上式为该系统的根轨迹方程,因为我们可以根据  $K^*$  画出该系统的根轨迹图。

## 3 绘制根轨迹的基本条件

已知,根轨迹方程实质上为一个复数方程:

$$-1 = 1e^{j(2k+1)\pi}, k=0, \pm 1, \pm 2 \dots$$

即可写为:

$$\sum_{j=1}^m \angle (s-z_j) - \sum_{i=1}^n \angle (s-p_i) = (2k+1)\pi$$

$$k=0, \pm 1, \pm 2 \dots \quad (1)$$

和:

$$K^* = \frac{\prod_{i=1}^n |s-p_i|}{\prod_{j=1}^m |s-z_j|} \quad (2)$$

(1)式和(2)式是根轨迹应同时满足的两个基本条

件,分别为相角条件和模值条件。依这两个条件,就可以确定根轨迹上的  $K^*$  的值,即可画出该系统的根轨迹图。

#### 4 绘制根轨迹规则

- (1) 起点与终点。
- (2) 分枝数、连续性、对称性。
- (3) 实轴上的根轨迹。
- (4) 渐近线。
- (5) 在实轴上的分离的。
- (6) 起止角和终止角。
- (7) 与虚轴的交点。

这七条绘制规则对我们手工绘图有极大的帮助作用,但手工绘图极为烦琐、精准性差,如果开环零极点的值发生变化,根轨迹的图也会因此变化。这样就会使分析过程变得烦琐,则又需重新计算确定各点重新绘图。此时利用 MATLAB 软件绘制根轨迹图的优势就凸显出来了。

#### 5 增加开环零点对根轨迹的影响

试举例:已知控制系统的开环传递函数为:

$$G(s) = \frac{K}{s^3 + 5s^2}$$

绘制该传递函数根轨迹图:

```
num = [ 1 ];
```

```
den = [ 1,5,0,0 ];
```

```
rlocus(num,den) % 绘制系统的根轨迹
```

```
title('Root Locus') % 命名根轨迹图
```

执行后得到下图,如图 2 所示。

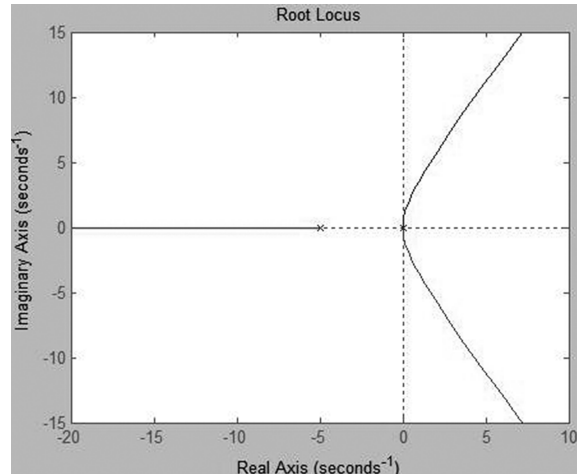
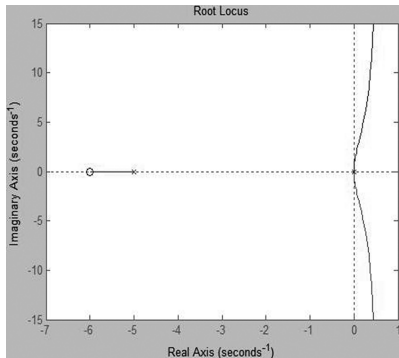
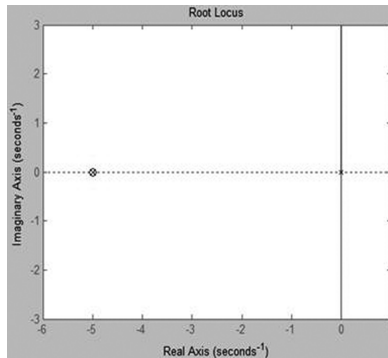


图 2 无零点时

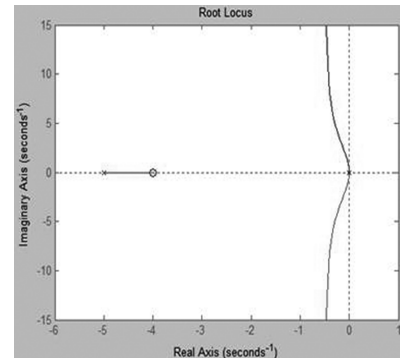
试增加一个开环零点,取零点值分别为 -6、-5、-4,根轨迹的变化如图 3 所示。



Z = -6



Z = -5



Z = -4

图 3 增加零点对根轨迹的影响

由图 3 表明,无零点系统不稳定。增加一个零点,若零点值越接近原点,则系统稳定性会更好。

#### 6 增加开环极点对根轨迹的影响

试举例:已知控制系统的开环传递函数为:

$$G(s) = \frac{K}{s^2 + 5s}$$

绘制该传递函数根轨迹图:

```
num = [ 1 ];
```

```
den = [ 1,5,0 ];
```

```
rlocus(num,den) % 绘制系统的根轨迹
```

```
title('Root Locus') % 命名根轨迹图
```

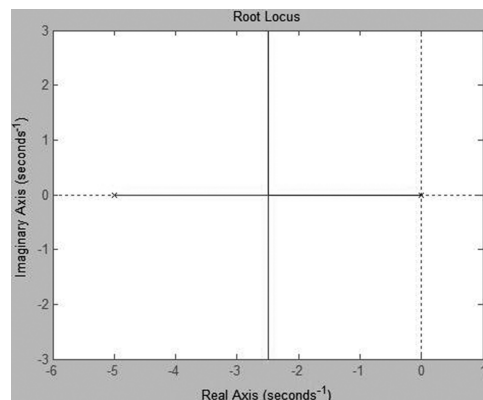


图 4 原系统

试增加一个开环极点,取极点值为-6、-4、0,根轨迹变化如图 5 所示。

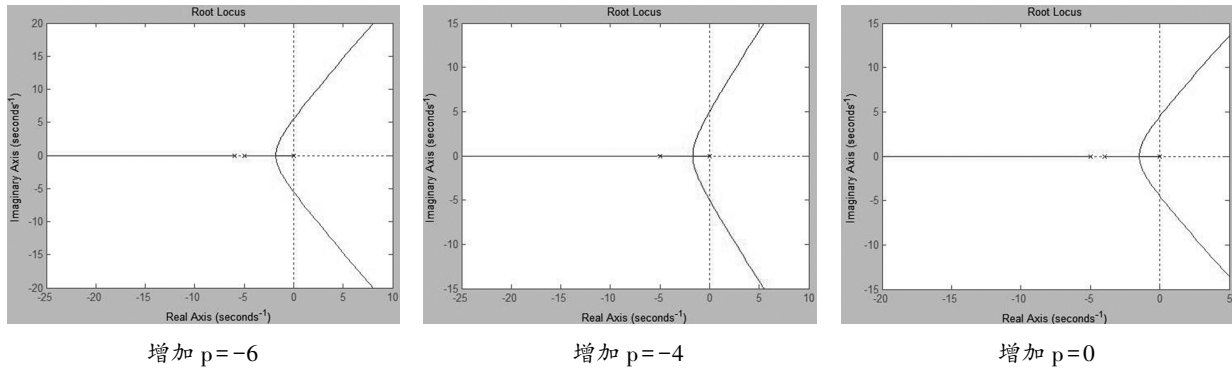


图 5 增加极点对根轨迹的影响

由图 5 表明,增加极点使根轨迹右移,稳定性变差。

综上所述,使用手工绘制根轨迹图的方法具有局限性。因此在使用根轨迹分析的某控制系统时,使用 MATLAB 进行仿真实验,能够在很短时间内能迅速得到一张精准的根轨迹图,同时得到其各项参数。

#### 7 应用 MATLAB 绘制根轨迹和对其系统进行分析

试举例:已知开环系统传递函数:

$$H(s) = \frac{k}{s^4 + 4s^3 + 2s^2 + 6s}$$

试绘出:闭环系统的根轨迹图。

解:使用 rlocus 函数可求出该根轨迹图,再使用 rlocfind 函数可得该轨迹上任意一点的开环增益。

MATLAB 程序为:

```
num = [ 1 ];
den = [ 1 4 2 6 0 ];
rlocus(num,den) % 绘制系统的根轨迹
title('Root Locus') % 命名根轨迹图
```

执行后,可以得到以下根轨迹图,如图 6 所示:

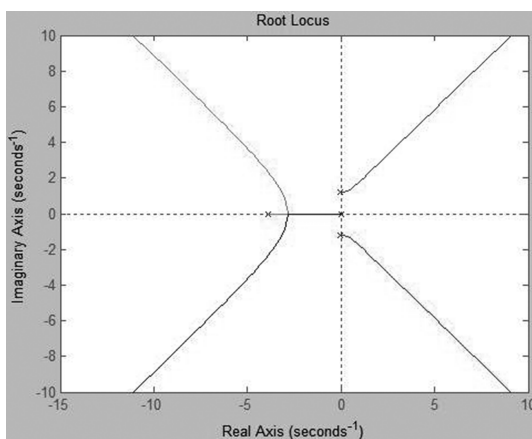


图 6 该系统根轨迹

`[k,p]=rlocfind(num,den)` % 求取根轨迹一点的开环增益,以及在该增益下系统的所有闭环极点。

运行后:用鼠标光标对应的十字光标选择根轨迹上的交点处,以计算出增益 k 及相应的极点,从而可得到:

`selected_point = -4.6031 + 3.1988i`

`k = 577.8116`

`p =`

`-4.5987 + 3.2025i`

`-4.5987 - 3.2025i`

`2.5987 + 3.4126i`

`2.5987 - 3.4126i`

这说明系统有三个极点。

#### 结语

对于控制系统使用根轨迹的图解方法更有效便捷,分析根轨迹使用 MATLAB 仿真分析法可以将抽象的分析具体化。仿真实验能直观地看见极点、零点的变化对它的影响,不仅能够深化学生对课程理论内容的理解,提高对知识点的掌握程度,丰富实际动手能力,还能引起学生的学习兴趣,让学生们对根轨迹有更清晰的认识。

#### 参考文献:

- [1] 郑超. 基于 MATLAB 的根轨迹法的研究[J]. 山西师范大学学报(自然科学版), 2008, (s2): 29-34.
- [2] 薛鹏, 郭会平, 程辉. 基于 Matlab 的自动控制原理实验教学探索[M]. 产业与科技论坛, 2020, 19(16).
- [3] 朱芳, 陈得宝, 韦氏红, 邹锋. MATLAB 软件在自动控制原理课程教学中的应用[J]. 黑龙江工业学院学报, 2018, 18(12).

作者简介:姚婕(2002—),女,汉族,四川仪陇人,本科,研究方向:基于根轨迹分析的 MATLAB 研究。